

A. Borroni, G. A. Gino, B. Mazza, G. Nano

Velocità ottimale di prelievo degli inquinanti particolati

ESTRATTO DA **aes** – RIVISTA DELL'ANTINQUINAMENTO – anno IV – n 10-ottobre 1982

ERIS S.p.A. - Edizioni per l'industria - 20124 Milano - P.zza Repubblica, 26

Velocità ottimale di prelievo degli inquinanti particolati

A. Borroni, G. A. Gino, B. Mazza, G. Nano

Scopo di questo studio è la proposizione di un metodo che permetta di stabilire la velocità più consona per il prelievo di un generico inquinante particolato presente in un ambiente di lavoro. Il valore di tale velocità è infatti influente sullo scostamento tra la situazione reale (caratterizzata da una certa presenza quantitativa di particolati distribuiti secondo classi granulometriche) e quella misurata (determinata dai prelievi), in relazione al prodursi di fenomeni di separazione tra le varie particelle. [Questo problema non si pone nel caso di inquinanti atmosferici gassosi]. Si intende cioè minimizzare quella parte degli errori sistematici che si commettono durante il campionamento, derivante da una scelta non corretta della velocità di prelievo.

Definizioni

Le miscele bifasiche gas-solido e gas-liquido, generalmente chiamate aerosol [secondo la norma AFNOR NF X 44-001 un aerosol è una sospensione di particelle solide o liquide aventi una velocità di caduta limite,

in aria quieta, pari a 25 cm/s], possono essere classificate sia in funzione del meccanismo di produzione, sia in funzione delle dimensioni della fase sospesa.

In funzione del meccanismo di produzione si possono distinguere:

— le polveri: prodotte per azione meccanica sui solidi, in operazioni quali la frantumazione, la molatura, ecc.;

— i fumi: prodotti per evaporazione e successiva solidificazione o modificazione chimica (ad es. ossidazione) di componenti di fasi condensate, o anche per reazione chimica fra specie gassose (ad es. fumi di NH_4Cl formati in presenza di HCl e NH_3);

— lo smog: prodotto dalla combustione incompleta di prodotti organici;

— le nebbie: prodotte per evaporazione e successiva condensazione di liquidi;

— gli spray: prodotti per azione meccanica di nebulizzazione e trascinamento di un gas su un liquido.

In Fig. 1 sono indicati gli intervalli di dimensioni delle particelle nelle categorie precedentemente individuate e i metodi di indagine più adatti all'analisi granulometrica.

Per quanto riguarda la morfologia, nelle miscele gas-liquido il particolato disperso assume

sempre una forma pressoché sferica. Nel caso di miscele gas-solido, invece, il particolato disperso assume forme che dipendono sia dal meccanismo di generazione, sia dal tipo di materiale di origine (amorfo, fibroso, cristallino, ecc.). In Tab. 1 viene schematicamente riportata la morfologia dei particolati nelle miscele gas-liquido e gas-solido, in funzione dei meccanismi di generazione. La classificazione degli aerosol in funzione delle dimensioni risulta univocamente determinata nel caso di particelle con forma regolare (potendosi allora utilizzare il diametro per le sfere, la diagonale per i cubi, ecc.), mentre nel caso di particelle con forma irregolare si può utilizzare la più opportuna dimensione caratteristica fra quelle riportate in Tab. 2. [I risultati di una analisi granulometrica devono essere accompagnati dalla specificazione del metodo usato e della dimensione caratteristica scelta. Infatti, metodi di indagine diversi e diverse definizioni dimensionali usate possono portare a differenti valutazioni granulometriche dello stesso campione].

Massa volumica

Per i particolati, oltre che la forma e le dimensioni (vedi parentesi quadra) deve essere definita anche la massa volumica,

A. Borroni, G.A. Gino, B. Mazza, G. Nano: Dipartimento di Chimica-Fisica applicata - Politecnico di Milano. Gruppo per gli Studi sui Sistemi di Produzione e sul Lavoro.

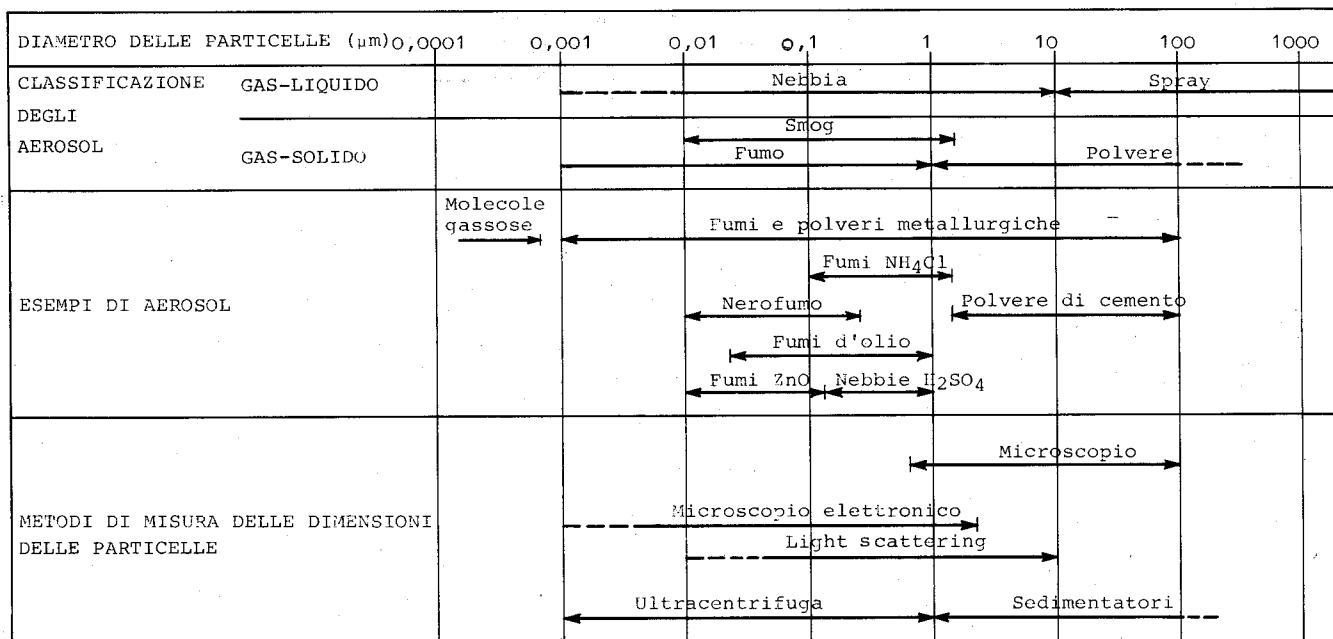


Fig. 1 - Intervalli di dimensioni delle particelle in miscele bifasiche gas-liquido e gas-solido e principali metodi di indagine utilizzati

che non sempre corrisponde a quella della specie chimica della fase di partenza, in quanto possono aver luogo fenomeni di adsorbimento superficiale o di formazione di aggregati di diversi materiali; in questo caso si parlerà di densità apparente. [Eventualmente in relazione anche al prodursi di fenomeni di coalescenza delle particelle. La coalescenza negli aerosol avviene quando le particelle si toccano; nel caso più frequente, quello di urti dovuti ai moti browniani, è possibile stimare il numero n di particelle per cm^3 che restano sospese dopo un tempo t , a partire dal numero iniziale n_0 di esse, mediante la formula:

$$n = \frac{n_0}{1 + k n_0 t}$$

dove la costante (di coalescenza) k varia con il diametro d delle particelle (supposte aventi tutte le medesime dimensioni) secondo la seguente tabella:

d (μm)				
k x 10 ¹⁰ (cm ³ /s)				
0,002	0,02	0,2	2	20
4,5	12	5	3	3

La coalescenza di particelle di dimensioni diverse è caratterizzata da valori di k molto più elevati, poiché le particelle più

grosse attraggono le più piccole. Nella trattazione dei fenomeni di coalescenza qui accennata non si considera la presenza di forze elettrostatiche, od altre].

Forze agenti sui particolati

Per effettuare un campionamento di particolati nelle condizioni più idonee è necessario valutare le forze che agiscono sulle particelle e gli effetti provocati su di esse; di queste forze, infatti, alcune favoriscono la sospensione, altre la sedimentazione.

Nel caso di particelle che abbiano un diametro nettamente superiore al cammino libero medio delle molecole dell'aria ($\approx 0,1 \mu\text{m}$) e che non siano soggette a forze elettrostatiche, centrifughe o di inerzia, la situazione può essere schematizzata nel seguente modo: la forza di gravità tende a far sedimentare le particelle, mentre la resistenza dell'aria si oppone a tale tendenza, rallentando quindi la caduta delle particelle stesse; la spinta di Archimede in aria è trascurabile per particelle con massa volumica superiore a 100 kg/m^3 .

Per particelle di diametro inferiore a $0,1 \mu\text{m}$ predominano i moti browniani che annullano la velocità di sedimentazione e

mantengono le particelle sospese in modo stabile.

Se si considera il moto di una particella sferica di diametro $d \gg 0,1 \mu\text{m}$ in aria calma, soggetta solo alla forza di gravità F_g e a quella di resistenza F_r , la velocità limite di sedimentazione v_s si ottiene uguagliando tra di loro tali forze. [Per particelle non sferiche può ritenersi valida in prima approssimazione la medesima trattazione, assumendo come diametro equivalente il diametro della sfera avente uguale rapporto tra volume e superficie della particella considerata].

La forza di resistenza è esprimibile tramite la formula:

$$F_r = \frac{f}{2} \rho_a \frac{\pi d^2}{4} v^2$$

dove: f = coefficiente di resistenza (adimensionale), ρ_a = massa volumica dell'aria (kg/m^3), d = diametro della particella (m), v = velocità della particella (m/s).

Il coefficiente di resistenza dipende dal tipo di moto della particella nell'aria, a sua volta caratterizzato dal valore del numero di Reynolds, $Re = \rho_a v d / \mu$, con μ viscosità dell'aria (kg/ms):

— per moto laminare ($Re < 3$) si ha
 $f = \frac{24}{Re}$;

— per moto turbolento ($Re > 1000$)
 $f \approx 0,44$;

— per moto intermedio, infine:

$$f = \frac{24}{Re} + \frac{4}{Re^{1/3}}$$

Uguagliando la forza di resistenza, per i diversi tipi di moto, alla forza

di gravità [$F_g = \frac{4}{3} \pi \frac{d^3}{8} \rho_p g$, dove:

ρ_p = massa volumica della particella (kg/m^3), g = accelerazione di gravità (m/s^2)] si ottiene:

— per il moto laminare:

$$v_s = \frac{1}{18} \frac{\rho_p g d^2}{\mu}$$

(legge di Stokes)

— per il moto turbolento:

$$v_s = \sqrt{\frac{3 \rho_p d g}{\rho_a}}$$

Per particelle con diametro fino a $50 \mu m$ e con massa volumica fino a $8000 kg/m^3$ (valori che rappresentano limiti pratici superiori per i particolati sospesi), il moto relativo aria-particella è di tipo laminare.

Le particelle con diametri inferiori ai $3 \mu m$ riescono a « scivolare » attraverso le molecole dell'aria, con un effetto di diminuzione della forza di resistenza; la legge di Stokes deve essere corretta mediante il fattore di Cunningham (> 1):

$$C = 1 + \frac{2\lambda}{d}$$

$$\cdot \left[1,26 + 0,4 \exp\left(\frac{-1,1 d}{2\lambda}\right) \right]$$

dove: λ = cammino libero medio del gas (per l'aria, a $20^\circ C$ a 1 atm, vale $6,5 \times 10^{-8} m$), per cui la velocità limite di sedimentazione diventa:

$$v_s = C v_s \text{ (Stokes)}$$

Per particelle soggette a forze di proiezione al momento della generazione (ad es. nelle operazioni di molatura), le diverse formule precedentemente riportate per la velocità di sedimentazione si possono applicare solo a distanze dalla sorgente superiori a quella per cui la

Tabella 1 - Possibile morfologia dei particolati in funzione del meccanismo di produzione e del materiale di origine

Tipo di aerosol	Meccanismo di generazione	Morfologia dei particolati					
		Sferica	Granulare	Poliedrica	Lamellare (*)	Fibrosa	Agglomerati
Gas-liquido	Meccanico	*					
	Condensazione	*					
Gas-solido	Meccanico	*	*	*	*	*	
	Condensazione	*		*	*		*
	Combustione	*					*

(*) Nei lamellari si includono anche gli aciculari

Tabella 2 - Dimensioni caratteristiche dei particolati

- Il diametro della sfera di uguale volume
- Il diametro della sfera di pari densità che sedimenta con la stessa velocità limite (diametro aerodinamico)
- Il diametro del cerchio inscritto o circoscritto all'area proiettata della particella
- Il diametro della sfera avente uguale rapporto tra volume e superficie della particella
- Il diametro del cerchio avente uguale area proiettata
- La media tra la massima e la minima dimensione misurabile
- La lunghezza del segmento che divide in due parti di uguale area la superficie proiettata (diametro di Martin)
- La lunghezza misurata sempre secondo una direzione di riferimento scelta arbitrariamente (diametro di Feret)
- La lunghezza, nel caso delle fibre (rapporto tra lunghezza e diametro superiore a 3)

velocità di proiezione si annulla. Per calcolare tale distanza (di proiezione) si stabiliscono anzitutto le equazioni del moto assumendo di poter trascurare la forza di gravità ($F_g \approx 0$), come è lecito nel caso di particelle aventi elevata velocità di proiezione iniziale. Si ha:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F_r}{\frac{4}{3} \pi \frac{d^3}{8} \rho_p}$$

e integrando:

$$s = \int_0^t v dt = \int_{v_0}^v v dv / \frac{dv}{dt}$$

dove: t = tempo; a = accelerazione; v = velocità; s = spazio percorso dalla particella; v_0 = velocità di proiezione iniziale, al momento della generazione ($t = 0$).

— Per il moto laminare:

$$a = \frac{18 \mu}{\rho_p d^2} v$$

$$s = \frac{1}{18} \rho_p d^2 \mu^{-1} (v_0 - v)$$

— Per il moto turbolento:

$$a = \frac{1}{3} \frac{\rho_a}{\rho_p d} v^2$$

$$s \approx 7 \rho_p \rho_a^{-1} d \log v_0/v$$

— Per il moto intermedio (Appendice 1):

$$a = -v \left(\frac{18 \mu}{\rho_p d^2} + \frac{3 \rho_a^{2/3} \mu^{1/3}}{\rho_p d^{4/3}} v^{2/3} \right)$$

$$s = \rho_p d^{1,33} \mu^{-0,33} \cdot \rho_a^{-0,67} (v_0^{0,33} - v^{0,33}) - \sqrt{\frac{1}{6} \rho_p \rho_a^{-1} d \tan^{-1}}$$

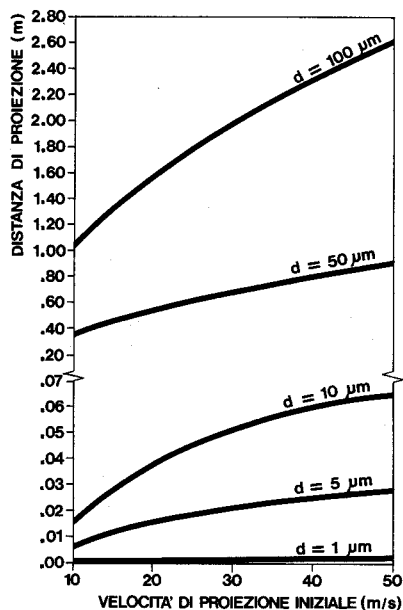


Fig. 2 - Distanza di proiezione di particolati con massa volumica di 8000 kg/m^3 , in funzione della velocità di proiezione iniziale e della granulometria

$$\left[\frac{1}{\sqrt{6}} d^{0,33} \rho_a^{0,33} \mu^{-0,33} (v_0^{0,33} - v_3^{0,33}) \right]$$

Per valori di v_0 compresi tra 10 e 50 m/s e valori di d compresi tra 1 e 100 μm , le particelle assumono inizialmente moto intermedio. Successivamente, al diminuire della velocità, in corrispondenza al valore di questa $v_3 = 3\mu/\rho_a d$ per cui si ha $\text{Re} = 3$ [$v_3 = 0,45, 0,9, 4,5, 9, 45 \text{ m/s}$ rispettivamente per $d = 100, 50, 10, 5, 1 \mu\text{m}$], il moto diventa laminare, fino al completo svanire della velocità di proiezione residua. Utilizzando quindi le formule che danno s in funzione di v , rispettivamente tra i limiti v_0 e v_3 quella del moto intermedio, ed i limiti v_3 e 0 quella del moto laminare, si ottiene la distanza di proiezione come somma dei due contributi.

Dalla Fig. 2, dove la distanza di proiezione è stata diagrammata in funzione della velocità di proiezione iniziale e della granulometria, per polveri con massa volumica di 8000 kg/m^3 , si può osservare che, per polveri con diametri da 10 a 50 μm , proiettate a 50 m/s, tale distanza è compresa tra la decina e il centinaio di cm. Nel caso di prelievi nelle immediate vicinanze di fonti di proiezione (ad

esempio prelievi personali sui lavoratori addetti alla molatura), bisognerà quindi tener conto anche di un termine di velocità di proiezione diverso da zero.

Negli ambienti di lavoro reali non è sempre applicabile l'ipotesi di aria calma; infatti le aperture di comunicazione fra i vari locali e con l'esterno, le sorgenti di calore, le ventilazioni e le aspirazioni creano moti d'aria con correnti permanenti o fluttuanti. In tali condizioni la velocità dell'aria si somma vettorialmente alle velocità di sedimentazione delle particelle, favorendo la sospensione e la dispersione delle stesse. Le correnti d'aria determinano quindi la presenza di particolati in concentrazione più o meno uniforme, o addirittura disposti preferenzialmente entro tubi di flusso. Mentre per particelle « grosse », dotate di alta velocità di sedimentazione, l'effetto della corrente è sensibile solo nelle vicinanze della sorgente di emissione; per particelle « fini », con bassa o addirittura nulla velocità di sedimentazione, tale effetto si fa risentire anche a notevole distanza dalla sorgente, essendo in tal caso il meccanismo di diffusione delle particelle stesse nell'ambiente quello del trasporto pneumatico.

Velocità di prelievo

La velocità di prelievo può essere causa di scostamento tra la situazione ambientale reale e la sua rappresentazione fornita mediante il campione prelevato. Infatti, velocità di prelievo troppo elevate possono portare a separazione per inerzia delle varie classi ponderali di particelle; mentre velocità di prelievo troppo basse non permettono la cattura delle particelle ad elevata velocità di sedimentazione. Bisogna inoltre tener presente che l'introduzione del sistema di campionamento induce nelle vicinanze una modificazione del campo di velocità. La velocità di prelievo dovrà quindi essere pre-determinata,

in modo che vengano rispettate le seguenti condizioni:

— essa dovrà essere sufficientemente elevata da non permettere la sedimentazione del particolato;

— d'altra parte non dovrà essere troppo elevata, affinché non si verifichi separazione per inerzia delle particelle;

— infine, dovrà essere tale che la variazione indotta del campo di velocità sia limitata nello spazio.

Perché risultino rispettate queste condizioni, si è imposto: — che l'estensione della zona di influenza dell'aspirazione sia dello stesso ordine di grandezza del diametro del prelevatore;

— che a tale distanza la componente orizzontale della velocità delle particelle, sotto l'azione dell'aspirazione (supposta orizzontale), sia almeno pari alla loro velocità di attraversamento della zona di influenza dell'aspirazione, sotto l'azione della gravità (velocità limite di sedimentazione);

— che il flusso all'imbocco del prelevatore sia di tipo laminare. La velocità delle particelle v è ottenibile come somma vettoriale della velocità dell'aria aspirata dal prelevatore v_a e della velocità relativa particelle-aria v_r . La velocità dell'aria aspirata può essere espressa, ad una generica distanza x dal prelevatore [distanza computata lungo l'asse (orizzontale) del prelevatore e contenuta entro 1,5 volte il diametro del prelevatore stesso], mediante la formula [applicabile nel caso di cappa flangiata, cui il prelevatore può essere assimilato (Fig. 3)]:

$$v_a(x) = \frac{Q}{0,75(A + 10x^2)}$$

dove: $A = \frac{\pi D^2}{4}$ = sezione del prelevatore, di diametro D ;

Q = portata volumetrica di aspirazione, per cui Q/A è la velocità di prelievo da determinare.

Un'espressione della velocità relativa particella-aria (componente orizzontale) in funzione di x può essere a sua volta otte-

nuta considerando l'equazione del moto della particella quando si assuma laminare il moto relativo:

$$a = a_a + a_r = -\frac{3 \pi \mu d v_r}{4 d^3} - \frac{\pi}{3} \frac{\rho_p}{8}$$

Risulta (Appendice 2):

$$v_r(x) = \exp(-K F(x)) \cdot \left[-v_a(x) \exp(K F(x)) + K \int_0^x \exp(K F(x)) dx + v_a(0) \right]$$

dove:

$$K = \frac{18 \mu}{\rho_p d^2} \quad (1/s)$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{dx}{v_a(x)} = \frac{0,75}{Q} \left(\frac{10 x^3}{3} + A x \right) (s)$$

Per particelle con massa volumica di 8000 kg/m³ e con diametro fino a 20 ÷ 30 μm, e per valori di x contenuti entro l'ordine di grandezza del diametro del prelevatore, risulta: v_r ≈ 0, per cui si può ritenere che le particelle si muovano solidalmente con l'aria.

In aria calma, per particelle con diametro fino a 20 ÷ 30 μm, dalle condizioni precedentemente imposte, vale a dire che sia:

$$v_a(D) = \frac{Q}{0,75 \left(\frac{\pi D^2}{4} + 10 D^2 \right)} = v_s$$

si ricava che la velocità di prelievo Q/A deve essere all'incirca uguale a 10 volte la velocità di sedimentazione della particella più grande che si vuole campionare. Ai fini di una pratica utilizzazione, in Fig. 4 sono direttamente riportate le velocità di prelievo da utilizzare in rapporto alla granulometria e alla massa volumica delle particelle. Reciprocamente, fissata una certa velocità di prelievo, la stessa Fig. 4 consente di sti-

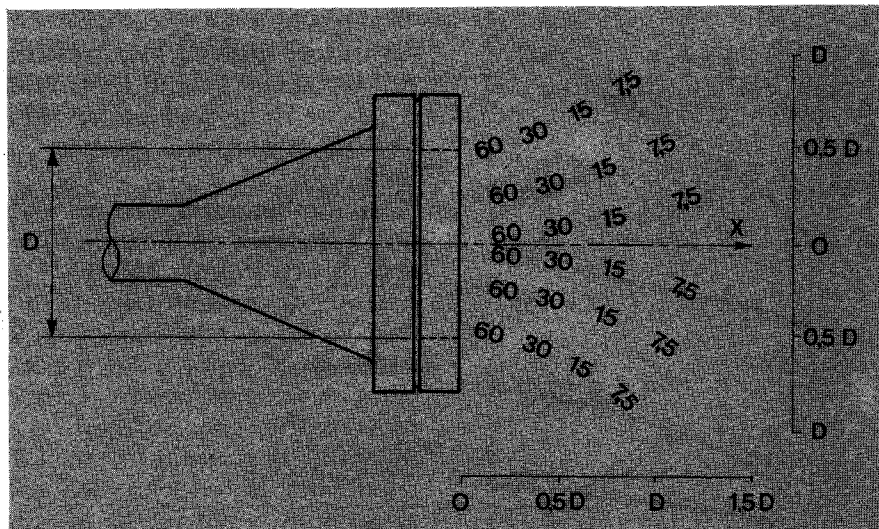


Fig. 3 - Distribuzione della velocità dell'aria (espressa in % della velocità all'imbocco) all'esterno di un prelevatore orizzontale assimilato ad una cappa flangiata, in aria calma

mare fino a quale granulometria, in rapporto alla massa volumica delle particelle, è possibile considerare il prelievo esente da errori apprezzabili dovuti alla sedimentazione.

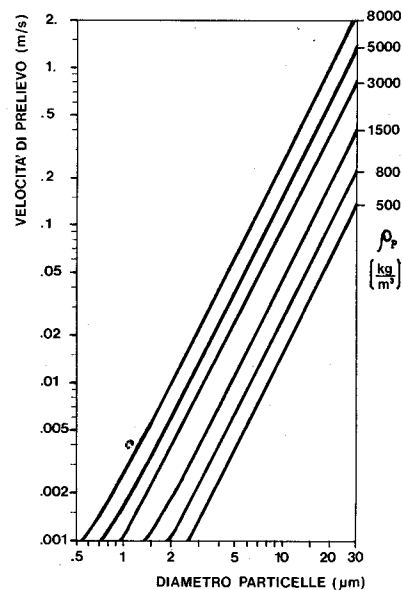
In presenza di correnti d'aria, oltre al problema della velocità di prelievo, si pone anche quello del posizionamento della sonda; a questo scopo si possono considerare schematicamente due casi limite, da cui far derivare gli altri:

- sonda posizionata con aspirazione equiverosa alla corrente;
- sonda posizionata con aspirazione con verso opposto alla corrente.

Il diverso posizionamento della sonda influisce sul campione prelevato poiché, in caso di aspirazione non equiverosa alla corrente, le particelle a granulometria più elevata, dotate di maggior inerzia, tendono a sfuggire alla cattura.

In caso di aspirazione equiverosa, la velocità di prelievo deve essere tale da assicurare la iso-

Fig. 4 - Velocità di prelievo per particolati in funzione della granulometria e della massa volumica



cineticità, in quanto velocità di prelievo troppo basse portano a sottostimare la presenza di particolati nell'ambiente e viceversa velocità troppo elevate a sovrastimarla.

Conclusioni

Per effettuare un prelievo di particolati in un ambiente di lavoro occorre preliminarmente studiare i cicli di lavorazione, gli impianti e i materiali usati; a partire da tali informazioni diventa infatti possibile fare delle stime sulle caratteristiche chimiche e fisiche delle polveri

presenti (composizione chimica, granulometria, ecc.) e sulla entità e modalità della loro emissione nello spazio e nel tempo (funzione dell'ubicazione degli impianti e delle aspirazioni, dei cicli di lavorazione ecc.). Occorre anche studiare i flussi d'aria presenti nell'ambiente considerato, studio che, assieme a quello precedente-

mente indicato, dà informazioni anche sulla presenza dell'inquinante nelle varie zone del reparto.

Con tutte le informazioni così acquisite si possono individuare le posizioni e le velocità di prelievo più opportune agli scopi prefissati.

Bibliografia

- [1] Peterson C.M.: Aerosol sampling particle size analysis. Air sampling instruments, 5ª edizione. ACGIH, Cincinnati, 1978.
 [2] Committee on industrial ventilation ACGIH: Industrial ven-

tilation, 15ª edizione. ACGIH, Lansing, 1978.

- [3] Capodaglio E., Pozzoli L., Sordelli D.: Generalità sul monitoraggio ambientale. Seminari di igiene industriale: Esposizione ad inquinanti industriali aerodispersi - polveri e vapori. Pavia, anno accademico 1978/79.
 [4] Gabriel M.J.M.: La pratique du prélèvement de poussières. Cahiers de notes documentaires, n. 90, I trimestre 1978.
 [5] Boffa C., Firrao D.: Tecniche di captazione e depurazione. Convegno nazionale: La protezione dell'ambiente industriale - l'inquinamento dell'aria. Torino, ottobre 1978.

- [6] Perkins H.C.: Air pollution. Mc Graw-Hill, New York, 1974.
 [7] Andreoletti F., Occella E.: Natura delle polveri industriali. Giornale degli igienisti industriali, supplemento al n. 1, anno I, dicembre 1976.
 [8] Bompane G.F., De Zaiacomò T., Prodi V.: Generazione e caratterizzazione di aerosol monodispersi. Giornale degli igienisti industriali, supplemento al n. 1, anno I, dicembre 1976.
 [9] Dente M., Ranzi E.: Principi di ingegneria chimica. Clup, Milano, 1977.
 [10] Perry R.H., Chilton C.H.: Chemical engineers' handbook, 5ª edizione. Mc Graw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1973.

APPENDICE 1

$$a = \frac{dv}{dt} = -v \left(\frac{18\mu}{\rho_p d^2} + \frac{3\rho_a^{2/3}\mu^{1/3}}{\rho_p d^{4/3}} v^{2/3} \right) = -v(K + H v^{2/3})$$

con:

$$K = \frac{18\mu}{\rho_p d^2}$$

$$H = \frac{3\rho_a^{2/3}\mu^{1/3}}{\rho_p d^{4/3}}$$

$$s = \int_{v_0}^v \frac{v dv}{\frac{dv}{dt}} = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{K + H v^{2/3}}$$

Ponendo:

$$v = z^3, \quad v^{2/3} = z^2, \quad dv = 3z^2 dz$$

$$s = -3 \int_{z_0}^z \frac{z^2 dz}{K + H z^2} =$$

$$= -3 \left[\frac{z}{H} - \frac{K}{H} \frac{1}{\sqrt{HK}} \tan^{-1} \cdot \left(z \sqrt{\frac{H}{K}} \right) \right]_{z_0}^z =$$

$$= -3 \left[\frac{v^{1/3}}{H} - \frac{K}{H} \frac{1}{\sqrt{HK}} \tan^{-1} \cdot \left(v^{1/3} \sqrt{\frac{H}{K}} \right) \right]_{v_0}^v$$

APPENDICE 2

$$a = a_s + a_r =$$

$$= -\frac{18\mu}{\rho_p d^2} v_r = -K v_r$$

con: $K = \frac{18\mu}{\rho_p d^2}$

Inoltre:

$$a_s = \frac{dv_s}{dt} =$$

$$= \frac{dv_s}{dx} \frac{dx}{dt} = v_s \frac{dv_s}{dx}$$

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} =$$

$$= \frac{dv_r}{dx} \frac{dx}{dt} = v_a \frac{dv_r}{dx}$$

per cui:

$$\frac{dv_r}{dx} = -\frac{K}{v_a} v_r - \frac{dv_s}{dx}$$

Si tratta quindi di una equazione differenziale lineare di primo ordine, del tipo: $y' = \alpha(x)y + \beta(x)$, il cui integrale generale è:

$$y = \exp(\int \alpha(x) dx) \cdot$$

$$\cdot \left[\int \beta(x) \exp(-\int \alpha(x) dx) dx + c \right]$$

Nel caso in esame, posto: $F(x) =$

$$= \int_0^x \frac{dx}{v_a(x)}, \text{ risulta:}$$

$$v_r(x) = \exp(-KF(x)) \cdot$$

$$\cdot \left[\int -\frac{dv_s(x)}{dx} \exp(KF(x)) dx + c \right]$$

od anche, tramite integrazione per parti:

$$v_r(x) = \exp(-KF(x)) \cdot$$

$$\cdot [-v_s(x) \exp(KF(x)) +$$

$$+ \int K \exp(KF(x)) dx + c]$$

La costante di integrazione c è determinata in base alla condizione che,

per $x = 0$, sia $\frac{dv_r}{dx} = 0$ (cioè: v_r

minima, oltre che nulla, per $x = 0$).
 Risulta: $c = v_s(0) = Q/O,75 A$.